Grafos y Órdenes

Taller de Talento Matemático de Navarra

Sergio Sara Goyén
Catedrático de Instituto Jubilado

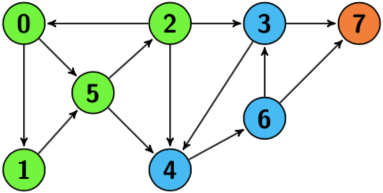
Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona (SPAIN).

8 de mayo de 2026

¿Qué muestra la imagen siguiente? Es un mapa del Metro de Barcelona, pero eso no es lo que nos interesa desde el punto de vista Matemático.

Un grafo está compuesto por dos conjuntos. Uno de puntos a los que llamamos vértices, y otro de líneas a las que llamamos aristas. Cada arista une dos vértices no necesariamente distintos, por lo que podemos tener aristas que unan un vértice consigo mismo. Además, puede suceder que haya vértices aislados, aquellos que no se unen con ningún otro mediante aristas.

Por ejemplo, la figura siguiente es un grafo.



Un grafo para ayudar a pensar

Alicia y Blas son pareja y han quedado para cenar con otras cuatro parejas en un restaurante. Al llegar a la cena, todos llegan con sus parejas y se saludan cordialmente. Unos se dan la mano y otros se dan dos besos. Tras los postres, Blas propone a sus nueve compañeros de mesa que escriban en un papel el número de personas a las que dieron la mano. Sin abrir los papeles, Blas los mezcla y los extiende sobre la mesa. Casualmente las nueve respuestas son distintas, no se repite ningún número. Cuando llegaron al restaurante, ¿a cuánta gente le dio la mano Alicia?

En busca del grafo perdido. Clara Grima. Editorial Ariel.

Los puentes de Königsberg (1736)

El río divide a Königsberg en cuatro zonas distintas que están conectadas por siete puentes. Un vecino sale de paseo y quiere cruzar cada puente una única vez regresando al punto de partida ¿Es posible?

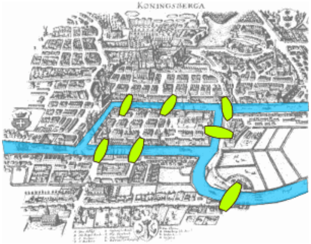


Figura: Königsberg

Figura: Leonard Euler

Grafos Eulerianos (02)

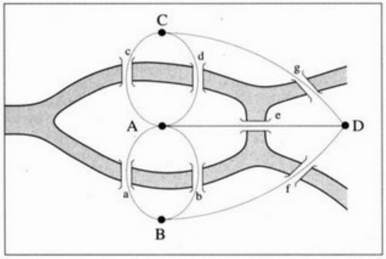


Figura: Centro de Königsberg

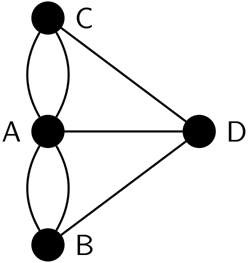


Figura: Abstracción de Königsberg

Grafos Eulerianos (03)

Definición de Camino en un grafo

En un grafo, un ***camino*** es una sucesión de vértices y aristas que empieza y termina en vértices y tal que cada vértice es incidente con las aristas que le siguen y le preceden en la secuencia.

Definiciones de Camino y de Ciclo Euleriano en un grafo

- En un grafo, diremos que un ***camino es Euleriano*** si pasa por cada arista del grafo una y solo una vez.
- En un grafo, diremos que un camino es ***Ciclo Euleriano*** si es un camino Euleriano cerrado. Es decir, si empieza y termina en el mismo vértice.
- Diremos que un ***Grafo es Euleriano*** si contiene un ciclo Euleriano.

Grafos Eulerianos (04)

Los dos teoremas siguientes resuelven completamente nuestro problema pues nos dan una caracterización total de los Grafos Eulerianos.

Definición

Sea G un grafo. Para cada vértice de G llamaremos *orden del vértice* al número de aristas de G que empiezan o terminan en él.

Teorema 1

Sea G un grafo conexo y no vacío. G es Euleriano si y solo si todos los vértices del grafo tienen orden par.

Teorema 2

Sea G un grafo conexo y no vacío. G contiene un camino Euleriano si y solo si el grafo contiene exactamente dos vértices de orden impar.

Algoritmo de Fleury (01)

Ya podemos decidir si un cierto grafo es, o no, Euleriano. Ahora necesitamos un procedimiento con el que obtener el ciclo o el camino Euleriano.

Algoritmo de Fleury

1. Seleccionar un vértice.
2. Seleccionar una arista de las que inciden en el vértice seleccionado pero que no desconecte el grafo.
3. Recorrer la arista hasta el vértice final y eliminarla. Ese vértice final pasa a ser el vértice ahora seleccionado.
   3.1) No quedan aristas. FIN.
   3.2) Quedan aristas. Repetir el paso 2.

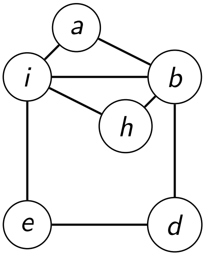


Figura: Aplicar Fleury

Ejercicios

Calcular, si es posible, un Camino Euleriano o un Ciclo Euleriano, para los grafos siguientes.

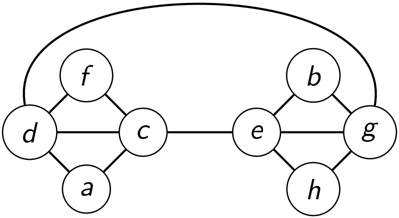


Figura: Ejercicio 1

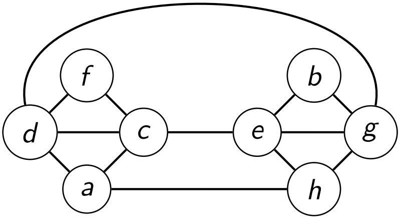


Figura: Ejercicio 2

Ejercicio

Calcular, si es posible, un Camino Euleriano o un Ciclo Euleriano, para el grafo siguiente.

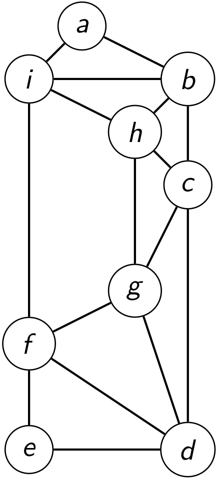


Figura: Ejercicio 3

Algoritmo de Fleury (04)

Problema del cartero chino (1962)

Un cartero chino, que además es matemático, tiene asignada para recoger y entregar el correo el sector de ciudad representado en el mapa siguiente. Los nodos U_i representan los cruces de calles y las aristas a las calles. El cartero debe recorrer todas las calles de su zona todos los días, lo cual suele ser bastante fatigoso. Para reducir el cansancio el cartero busca una ruta que pase una única vez por cada calle y que empiece y termine en la oficina de correos. Diseñar una ruta de esas características sabiendo que la oficina está situada en el cruce U_7.

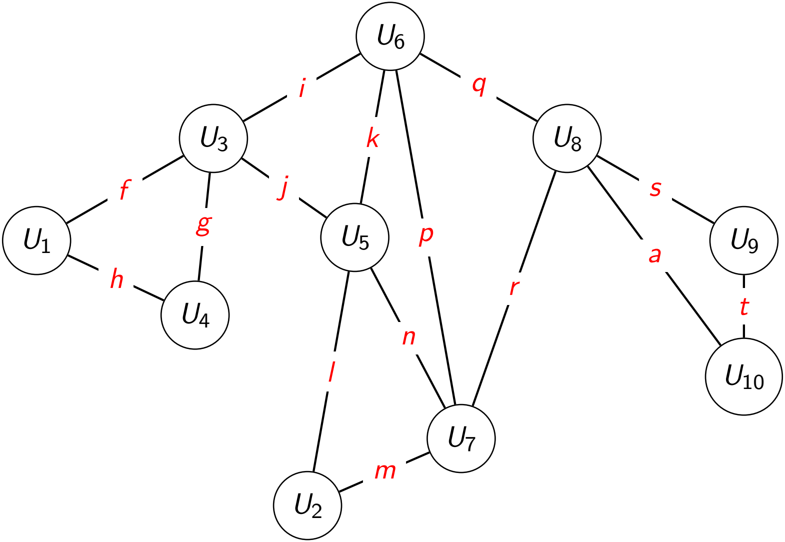


Figura: Zona asignada al cartero chino.

Grafos Hamiltonianos (01)

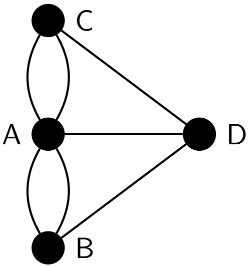


Figura: Grafo de Königsberg

Regresemos al Grafo de la ciudad de Königsberg. Antes nos preguntábamos si era posible dar un paseo, empezando y terminando en el mismo lugar, de manera que recorramos una única vez todos y cada uno de los siete puentes.
Cambiamos el juego. Empezando y terminando en el mismo lugar, pretendemos dar un paseo en el que pasaremos una única vez por cada uno de los barrios de la ciudad ¿Es posible?
Sí es posible: A, B, D, C, A.

Grafos Hamiltonianos (02)

Este objeto, un dodecaedro, puede ser interpretado como un grafo: los vértices del poliedro son los vértices del grafo y las aristas del grafo son las del poliedro.
Podemos caminar por las aristas del poliedro pero no podemos hacerlo por sus caras. ¿Existe algún camino que, empezando y terminando en el mismo vértice, pase exactamente una vez por todos y cada uno de los vértices?

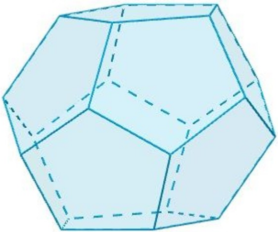


Figura: Dodecadro.

El diagrama siguiente nos da una representación plana del dodecaedro. Este diagrama es más cómodo para definir y probar caminos, por lo que puede ser usado para resolver nuestro problema.

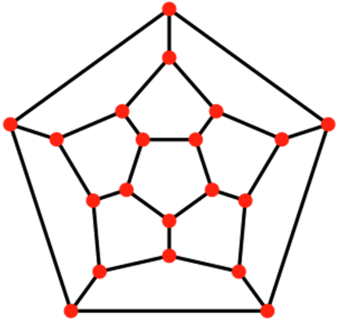


Figura: Dodecadro: Diagrama de Schlegel.

Grafos Hamiltonianos (04)

Sobre el dodecaedro se puede definir un ciclo, camino cerrado, que pasa exactamente una vez por todos y cada uno de los veinte vértices. Es el trazo rojo de la figura:

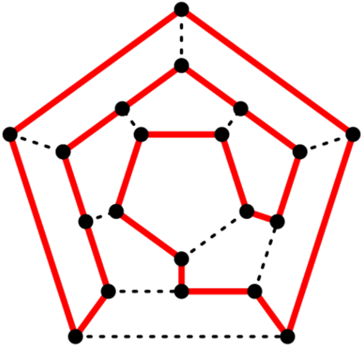


Figura: Ciclo de Hamilton sobre el Dodecadro.

Definiciones de Camino y de Ciclo Hamiltoniano en un grafo

- En un grafo, diremos que un ***camino es Hamiltoniano*** si pasa por cada vértice del grafo una y solo una vez.
- En un grafo, diremos que un camino es ***Ciclo Hamiltoniano*** si es un camino Hamiltoniano cerrado. Es decir, si empieza y termina en el mismo vértice.
- Diremos que un ***Grafo es Hamiltoniano*** si contiene un ciclo Hamiltoniano.

Las definiciones de Grafo Euleriano y de Grafo Hamiltoniano son muy parecidas. La condición es la misma, *pasar por todos una única vez*, pero en los Eulerianos se aplica sobre las aristas y en los Hamiltonianos sobre los vértices ¿Hay alguna relación entre ambos tipos de grafos?

Grafos Hamiltonianos (06)

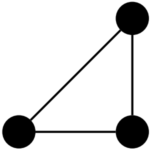


Figura: Grafo G_1

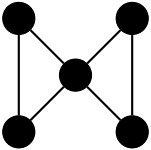


Figura: Grafo G_2

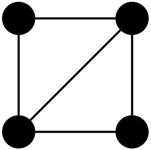


Figura: Grafo G_3

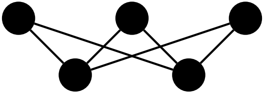


Figura: Grafo G_4

El Grafo G_1 es Euleriano y es Hamiltoniano; El grafo G_2 es Euleriano pero no es Hamiltoniano.
El Grafo $G3$ no es Euleriano pero sí es Hamiltoniano; El grafo G_4 ni es Euleriano ni es Hamiltoniano.

Ya hemos señalado el parecido que existe entre las definiciones de Grafo Euleriano y de Grafo Hamiltoniano. Por otra parte, también conocemos una caracterización de los Grafos Eulerianos en términos de la paridad del grado de sus vértices. Además, cuando el grafo es Euleriano disponemos de algoritmos, por ejemplo el de Fleury, que nos permiten obtener sus ciclos Eulerianos.

Desgraciadamente, cuando tratamos con Grafos Hamiltonianos no disponemos de caracterizaciones como la de los Eulerianos. Sí que disponemos de algunas condiciones necesarias y de algunas suficientes para el hecho de que el grafo sea Hamiltoniano.

Si un grafo no es conexo nunca podrá ser Hamiltoniano. Un grafo ***completo***, aquel en el que cualquier par de vértices están unidos por una arista, siempre es Hamiltoniano.

Supondremos que los grafos con los que tratamos son conexos, simples, sin lazos y con más de dos vértices.

Definición de clausura

Dado un grafo G con n vértices, la ***clausura*** de G es el grafo que tiene los mismos vértices que G y cuyas aristas son también las de G, a las que se añaden todas las $\{A, B\}$ que podemos trazar siendo A y B dos vértices de G que no sean adyacentes y que satisfagan la condición:

$$\delta(A) + \delta(B) \geq n,$$

donde $\delta(A)$ denota el grado del vértice A.

Un ejemplo de clausura usando un grafo clásico, el ***Grafo Casa.***

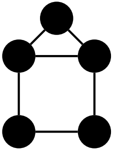


Figura: Grafo Casa

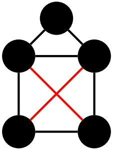


Figura: Clausura Casa

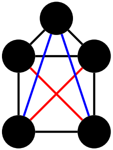


Figura: Clausura de la Clausura Casa

Un Teorema que, en ocasiones, permite decidir si un grafo es Hamiltoniano.

Teorema de Bondy y Chvátal (1976)

Un grafo G es Hamiltoniano si y solo si su clausura también lo es.

La Clausura de la Clausura es un grafo Hamiltoniano por ser completo, luego, aplicando el teorema, el Grafo Casa también lo es.

¡Fin!

Muchas gracias por vuestra atención.